Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und zweite Pfadregel

Mithilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten lässt sich die zweite Pfadregel für zweistufige Baumdiagramme zum Satz der totalen Wahrscheinlichkeit verallgemeinern:

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

Beispielaufgabe:
Das Werk von Jenchip produziert elektronische Bauelemente mit den Drei Maschinen M_1, M_2 und M_3. M_1 hat an der Gesamtproduktion einen Anteil von 35%, M_2 von 42%.
Die Ausschussquoten betragen erfahrungsgemäß bei M_1 1,0%, bei M_2 2,5% und 2,0% bei M_3.
Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein von Jenchip produziertes Teil ein Ausschussteil ist.
Zeichne Baumdiagramm:

1. Ein Elektrogeschäft werde von drei verschiedenen Herstellern H_1, H_2 und H_3 und nur von ihnen mit Energiesparlampen beliefert. Erfahrungsgemäß sind 7% derjenigen Energiesparlampen von H_1, 5% derjenigen von H_2 und 12% derjenigen von H_3 „Montagsbirnen" d.h. mit deutlich kürzerer als die ausgewiesene Lebensdauer.
Dieses Elektrogeschäft deckt seinen Energiesparlampenbedarf zu einem Drittel durch den Hersteller H_1, und zu Hälfte durch H_2.
Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Geschäft ein Käufer von einer „auf gut Glück" herausgegriffenen Energiesparlampe eine „Montagsbirne" kauft. (L: 0,0683)

2. In einer Population von 1000 Individuen genau 100 mit dem Genotyp AA und 400 mit dem Genotyp Aa.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass en willkürlich aus dieser Population ausgewähltes Individuum ein a – Allel besitzt. L: 0,9
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass en willkürlich aus dieser Population ausgewähltes Individuum ein a – Allel besitzt, wenn bekannt ist, dass dieses ein A – Allel aufweist. L: 0,8

3. Von einer Gesamtmenge an Münzen war 1% Falschgeld im Umlauf. Mit einem bestimmten technischen Verfahren konnte man nur 90% der falschen Münzen als solche erkennen. 20% der echten Münzen werden irrtümlich als falsch eingeordnet.
p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine falsch eingestufte Münze tatsächlich falsch ist.
Eine Münze werde mit diesem Verfahren überprüft.
q ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Münze richtig beurteilt wird.
Berechne p und q.
L: p $\approx 0{,}043$ q $\approx 0{,}801$

Umgekehrtes Baumdiagramm und Satz von Bayes

Beispielaufgabe:
Patienten, die an einer bestimmten Krankheit leiden, werden durch das Medikament M mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 geheilt. Die Einnahme dieses Medikaments verursacht mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 Nebenwirkungen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Patient, bei dem sich Nebenwirkungen zeigen, nicht geheilt?
Definiere die Ereignisse:

Baumdiagramm:

(0,3)

1. Bei einer bestimmten Patientengruppe kommen drei Krankheitsursachen U_1, U_2, U_3 in Frage, die mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeiten auftreten.
Die Wahrscheinlichkeiten betragen $P(U_1) = 0{,}05$, $P(U_2) = 0{,}35$ und $P(U_3) = 0{,}60$. Bei einem neu dazukommenden Patienten beobachtet man ein Symptom S, welches bei der Krankheitsursache U_1 zu 25%, U_2 zu 20%,U_3 zu 10% aller Fälle vorkommt.
Welche Krankheitsursache ist bei Vorliegen dieses Symptoms die wahrscheinlichste.
(L: $P_S(U_1) = 0{,}072$ $P_S(U_2) = 0{,}41$ $P_S(U_3) = 0{,}35$)

2. Skizziere ein Baumdiagramm mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:
• Eine rein zufällig ausgewählte Person werde mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,067 als hochbegabt eingestuft, d.h., der entsprechende Test geht positiv aus.
• Bei einer nicht hochbegabten Person zeige der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 irrtümlich eine Hochbegabung an.
• 0,84 sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test bei einer hochbegabten Person positiv ausfällt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass eine Person bei einem negativen Testergebnis dem noch hochbegabt ist
p=0,0037

3. In einem Meinungsforschungsinstitut wird eine telefonische Umfrage vorbereitet. Aus Erfahrung wissen die Mitarbeiter, dass zur entsprechenden Zeit nur etwa $\frac{2}{7}$ der Angerufenen erreichbar sind und dass etwa die Hälfte der Erreichten die telefonische Auskunft verweigert. Im Institut nimmt man weiterhin an, dass von den Nichterreichten nur $\frac{1}{3}$ die telefonische Auskunft verweigern würde.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der eine zur telefonischen Auskunft willige Person zu dieser Zeit erreichbar ist.
0,23

4. Ein elektronisches Gerätebauteil bestehend aus zwei parallel geschalteten Elementen E_1 und E_2 funktioniert nur, wenn mindestens eines der beiden Elemente intakt ist, und es arbeitet mit einer Zuverlässigkeit von 99,5%. Fällt das Element E_1 aus, so ist die Wahrscheinlichkeit gleich 0,80, dass E_2 arbeitet. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Elemente arbeitsfähig sind, beträgt 0,95.
Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass E_1 defekt ist, obwohl das Gerätebauteil arbeitet. 0,020

5. Eine Nachricht besteht aus den Signalen „Punkt“ und „Strich“.
Die statistischen Eigenschaften einer Störung sind derart, dass im Mittel $\frac{2}{5}$ der gesendeten Punkte als Striche und $\frac{1}{3}$ der gesendeten Striche als Punkte empfangen werden. Es ist bekannt, dass die Signale „Punkt“ und „Strich“ im Verhältnis 5:3 gesendet werden.
Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass ein gesendetes Signal richtig verstanden werden kann, wenn
a)das Signal „Punkt“ empfangen wird
0,75
b)das Signal „Strich“ empfangen wird
0,5

6. Einer Urne mit genau zehn Kugeln, die mit den zehn Zahlen $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$ durchnummeriert sind, werden „auf gut Glück“ zwei Kugeln mit einem Griff entnommen, und es wird das Produkt der Kugelnummern gebildet.
Würdest du auf ein positives oder auf ein negatives Produkt setzen?

$P(P_+) = \frac{4}{9}$ $P(P_-) = \frac{5}{9}$

7. In einem Werk werden Solarmodule mit einem Anteil fehlerhafter Module von 5% produziert.
Ein vom Hersteller eingesetztes Prüfverfahren stuft 6% aller produzierten Solarmodule als fehlerhaft ein.
Dabei werden (irrtümlicherweise) von den fehlerhaft produzierten Solarmodulen 2% ist fehlerhaft eingestuft.
Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei diesem Prüfverfahren ein fehlerhaft produziertes Solarmodul auch als solches erkannt wird.

$P_F(A) = 0,82$

8. Ein Brief wird gesucht, der sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$ in einem Schreibtisch befindet. Falls sich der Brief im Schreibtisch befindet, so liegt er in genau einem der acht Fächer, und zwar besitzen alle Fächer dafür dieselbe Chance. In sieben Fächern wurde bereits vergebens gesucht.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass sich der Brief trotzdem im Schreibtisch befindet. $\frac{1}{21}$