**3. Zufallsgrößen und ihre Eigenschaften**

Wiederholung Klasse 10

**3.1 Erwartungswert**

Bsp. für einen Wettbewerb soll eine Familie mit drei Kindern zufällig ausgewählt werden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den drei Kindern kein Mädchen, ein Mädchen, zwei Mädchen oder drei Mädchen sind?
(Baum!!!)

Einführung einer Zufallsgröße **X** : Anzahl der Mädchen
Welche Realisierung hat die ZG? → 0,1,2,3
Welche WK haben die einzelnen Realisierungen? $P(X = x_i)$ i = 0, 1, 2, 3
Erstellung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
(Histogramm oder Tabelle)

Bsp.: **X** : Anzahl der Mädchen

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**Definition**: **Zufallsgröße** (Kl.10)
**Zufallsgrößen** sind quantitative Merkmale bei Zufallsversuchen. Zu jedem Ergebnis eines solchen Zufallsversuches gehört ein **Wert der Zufallsgröße.**

**Definition**: **Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße** (Kl.10)
Eine Funktion, die jedem Wert einer Zufallsgröße eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **Verteilung einer Zufallsgröße.**
Die Verteilung einer Zufallsgröße kann man durch eine Tabelle oder ein Histogramm angeben.

**Definition**: **Erwartungswert einer Zufallsgröße**

Eine Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots\ldots P(X = x_n)$ an. So wird das zu erwartende „arithmetische Mittel „ μ oder E(X) der Verteilung **Erwartungswert der Zufallsgröße X** genannt.
Es gilt:

$$E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots\ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße gibt an, welchen Wert der Zufallsgröße man bei häufiger Versuchsdurchführung im Mittel erhält.

**Faires Spiel:** **Erwartungswert des Gewinns ist NULL** oder
**Erwartungswert der Auszahlung = Einsatz**

## 3.2 Varianz und Standardabweichung

**gegeben: 2 Verteilungen Z und X durch ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen**

**Z:**

| $z_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Z=z_i)$ | 0,05 | 0,05 | 0,1 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,2 |

**X:**

| $x_i$ | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,5 |

**E(X) =** **E(Z) =**

**Worin unterscheiden sich die beiden Verteilungen?**

**→ Streuung d.h. bei Z streuen die Realisierungen weiter um den Erwartungswert → Verteilung ist breiter**

**Wie könnte man diese Streuung mathematisch fassen?**

**→ E(X-E(X)) geeignetes Maß?**

$E(X) = \mu$ **!**

$$E(X - E(X)) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu \cdot P(X = x_i) = \mu - \mu = 0$$

**geht nicht!** ( neg. und pos. Abweichungen heben sich auf!)

→ $m = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu| \cdot P(X = x_i)$ vor Zeitalter der Taschenrechner und Computer unbequem

→ **andere Möglichkeit** : $(x_i - \mu)^2$ → **mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert** wurde als Streumaß definiert :

**→ VARIANZ Var(X)**

Berechne Var(X) und Var(Z) !

**Definition Varianz**

X sei eine ZG, die die Werte $x_1$, $x_2$, …$x_n$ annehmen kann und die den Erwartungswert $\mu$ = E(X) besitzt, so heißt die reelle Zahl

$$\text{Var}(x) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots\ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

**Varianz** der ZG X.

**→ Varianz ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Erwartungswert Var(X) = E(X – E(X))$^2$**

**Definition Standardabweichung**

$\delta(x) = \sqrt{\text{Var}(x)}$ **heißt Standardabweichung von X → Var(x) =** $\delta^2$

(Standardabweichung→ Quadratwurzel aus der Varianz

**Ermittlung der Kenngrößen einer Zufallsgröße mit dem GTR:**

**(1)** über Listen $L_1$ $L_2$ → Programm Stochastik → E(X) ….. $x_i$: $L_1$
$p_1$: $L_2$

oder

**(2) direkt** → Programm Stochastik → E(X) ….. $x_i$:
$p_1$: (Werte in geschweifte Klammer!)