

Wiederholung : Schnitt Gerade, Ebene

1. In einem kart. Koordinatensystem sind eine Gerade g durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ für jedes } k \in \mathbb{R} \text{ eine Ebene } E_k$$

durch $E_k: (k+1)x_1 + x_2 + (k-1)x_3 = -k-3$ sowie die Punkte $A(6 / -15 / 16)$ und $C(18 / -6 / 1)$ gegeben.

Die Ebene F enthält die Gerade g sowie den Punkt A .

- 1.1 Begründe, dass die Ebene F durch g und A eindeutig bestimmt ist.

Zeige, dass der Punkt C ebenfalls in F liegt.

Die Schnittpunkte S_{x_1} , S_{x_2} und S_{x_3} der Ebene F mit den Koordinatenachsen und der Koordinatenursprung sind Eckpunkte einer Pyramide. Ermittle das Volumen dieses Körpers.

- 1.2 Weise nach, dass sich alle Ebenen der Schar E_k in einer gemeinsamen Geraden schneiden. Gib diese Gerade an.

2. In einem kart. Koordinatensystem sind die Punkte $A(1/-1/1)$, $B(0/2/-4)$

und $C(4/-3/2)$ sowie Geraden $g_{a,b}$ durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ $a, b, t \in \mathbb{R}$ gegeben.

- 2.1 Die Punkte A , B und C spannen eine Ebene auf und gib eine parameterfreie Gleichung (Koordinatenform) dieser Ebene an!

- 2.2 Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S , in dem die Gerade $g_{2,b}$ die Ebene E schneidet

- 2.3 Weise nach, dass es kein b ($b \in \mathbb{R}$) gibt, so dass alle Koordinaten des Schnittpunktes S positiv sind.

- 2.4 Untersuche allgemein, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden Lagebeziehungen zwischen $g_{a,b}$ und der Ebene E bestehen:

- (a) $g_{a,b}$ schneidet E in genau einen Punkt
- (b) $g_{a,b}$ liegt in der Ebene E
- (c) $g_{a,b}$ ist echt parallel zu E

3. Eine Gerade h verläuft durch die Punkte $P(6,5 / 8 / 3)$ und $Q(7,5 / 6 / 3)$.

- 3.1 Zeige, dass diese Gerade h jede Geradenschar g_a mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5-a \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \text{ schneidet.}$$

- 3.2 Gib eine Gleichung der Ebene an, in der h und g_a liegen.
Warum muss diese Ebene von a unabhängig sein?