1.Besondere Produkte von Vektoren

1.1 Skalarprodukt zweier Vektoren

Beispiel: Physik→ Definition der mechanischen Arbeit : $W = \vec{F} \bullet \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos(\angle \vec{F},\vec{s})$

W…skalare Größe $\vec{F},\vec{s}$ vektorielle Größen

$W = |\vec{F}||\vec{s}|$ → $\vec{F} \,//\, \vec{s}$

1.1.1 Definition: (zur besseren Verständigung: • Multiplikation von Vektoren)

Das **Skalarprodukt** $\vec{a} \bullet \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die **reelle Zahl** $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$**,** wobei $\angle(\vec{a},\vec{b})$ einer der beiden Winkel ist, die von beiden Vektoren eingeschlossen werden.

Bsp. $|\vec{a}| = a = 3{,}5$ $|\vec{b}| = b = 3$ und $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \quad = 120°$

→ $\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\angle(\vec{a},\vec{b}) \quad = 3{,}5 \cdot 3 \cdot \cos 120°$ = -5,25

φ	$\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos$
0°	$\vec{a} \bullet \vec{b} = a \cdot b$
$0° < \varphi < 90°$	$\vec{a} \bullet \vec{b} > 0$
$\varphi = 90°$	$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$
$90° < \varphi < 180°$	$\vec{a} \bullet \vec{b} < 0$
$\varphi = 180°$	$\vec{a} \bullet \vec{b} = -\, a \cdot b$

1.1.2 Anwendungen:

a) Zueinander senkrechte (orthogonale) Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ stehen genau senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt **gleich Null** ist → $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

b) Betrag eines Vektors

$\vec{a} \bullet \vec{a} = a \cdot a \cdot \cos 0° = a^2$ $\qquad a = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}$

c) Einheitsvektoren → haben den Betrag 1.

Zu jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gibt es einen gleichgerichteten **Einheitsvektor** $\overrightarrow{a_0}$

mit $\vec{a}_0 = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$

d) Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos\angle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{a \cdot b} = \vec{a}_0 \bullet \vec{b}_0$$

e) Rechengesetze für das Skalarprodukt

(1) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ $\qquad$ (2) $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$ $\qquad$ (3) $(\lambda\vec{a}) \bullet \vec{b} = \lambda(\vec{a} \bullet \vec{b})$

1.1.3 Das Skalarprodukt in Koordinatenschreibweise

Sei $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, (\vec{u}_3)\}$ eine Basis des zwei- bzw. dreidimensionalen Vektorraumes und

$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$ bzw. $\vec{b} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3$

dann

$$\begin{aligned}\vec{a} \bullet \vec{b} = {} & a_1b_1 \cdot (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) + a_1b_2(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2) + a_1b_3(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_3) \\ & + a_2b_1 \cdot (\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1) + a_2b_2(\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2) + a_2b_3(\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3) \\ & + a_3b_1 \cdot (\vec{u}_3 \bullet \vec{u}_1) + a_3b_2(\vec{u}_3 \bullet \vec{u}_2) + a_3b_3(\vec{u}_3 \bullet \vec{u}_3)\end{aligned}$$

Definition: orthonormierte Basis

Eine Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, (\vec{e}_3)\}$ heißt **orthonormiert**, wenn:

(1) die Länge jedes Basisvektors 1 ist d. h. $\vec{e}_i \bullet \vec{e}_i = 1$ (i = 1,2,3)

(2) die Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen d. h. $\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = 0$ $(1 \le i, j \le 3, i \ne j)$

Bzgl. einer **orthonormierten Basis** lautet das **Skalarprodukt** zweier Vektoren in Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

1.1.4 Anwendungen: bzgl. einer orthonormierten Basis gilt:

a) $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

c) $\vec{a}_0 = \frac{1}{a}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Bsp. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

d) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{a \cdot b} = \vec{a}_0 \bullet \overrightarrow{b_0} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Bsp. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzgl. ONB →

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \angle(\vec{a},\vec{b}) = 45°$$

1.1.5 Messung im kartesischen Koordinatensystem

→ Ein Koordinatensystem mit einer ONB heißt
kartesischen Koordinatensystem.

Anwendungen :

a) Länge einer Strecke

Sind A(a_1/ a_2/ a_3) bzw. B(b_1/ b_2/ b_3)Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem dann $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Bsp.: A (1/2/ -3) B (3/ -2/-1) → $\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{6}$

b) Innenwinkel eines Dreiecks

Sind A(a_1/ a_2/ a_3), B(b_1/ b_2/ b_3) und C(c_1 /c_2 / c_3) Eckpunkte eines Dreiecks in einem kartesischen Koordinatensystem, dann gilt z.B. für den Innenwinkel γ :

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}$$

Bsp.: A(0/2/0), B(0/-6/0), C((0/0/2)

$$\rightarrow \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = -8$$

$$\overline{CA} = \sqrt{8} \quad \overline{CB} = \sqrt{40} \rightarrow \cos\gamma = \frac{-8}{\sqrt{8}\sqrt{40}} \rightarrow \gamma \approx 116{,}57°$$

c) Schnittwinkel zweier Geraden

Sind g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{u}$

Geraden in einem kartesischen Koordinatensystem, dann gilt für den **Schnittwinkel** $\angle$(g,h):

$$\cos\angle(g,h) = \left|\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{u \cdot v}\right|$$

Bsp. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\angle g,h) = \left|\frac{-2}{\sqrt{30}\sqrt{10}}\right| \rightarrow \angle(g,h) \approx 83{,}37°$$

d) Winkelhalbierende

Sind g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{u}$ zwei sich schneidende Geraden und ist $\vec{s}$ der Ortsvektor des Schnittpunktes, dann lauten <u>die Gleichungen der Winkelhalbierenden</u>

w: $\vec{x} = \vec{s} + \lambda(\vec{v}_0 \pm \vec{u}_0)$