Normalenform der Ebenengleichung – Abstand Punkt –Ebene
HESSEsche Normalenform

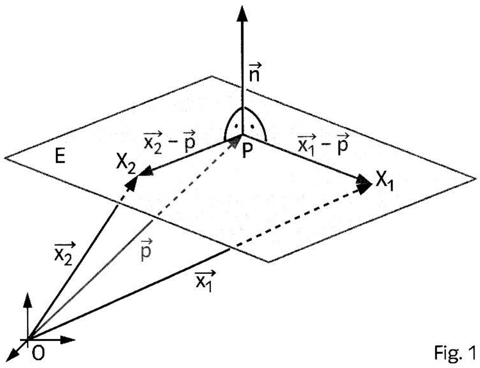


Fig. 1

Abstand Punkt – Ebene

1 In Fig. 143.1 ist $\overline{RF}$ der Abstand des Punktes R von der Ebene E. Der Punkt F ist also der Fußpunkt des Lotes von R auf die Ebene E. Wie kann man die Koordinaten von F berechnen, wenn die Ebene E in Parameterform gegeben ist?

Wir wollen den Abstand eines Punktes R von einer Ebene E berechnen.

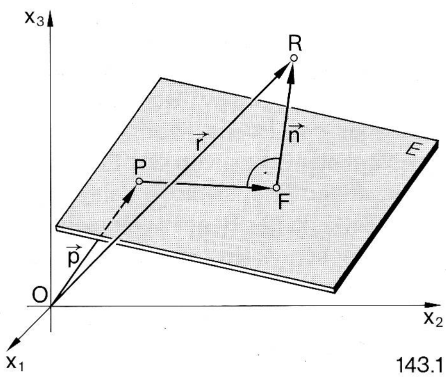
F sei der Fußpunkt des Lotes von R auf E (Fig. 143.1). Dann können wir $\vec{n} = \overrightarrow{FR}$ als Normalenvektor von E benutzen; E hat dann die Gleichung $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{FR} = 0$.

Aus $\overrightarrow{FR} = \vec{r} - (\vec{p} + \overrightarrow{PF}) = \vec{r} - \vec{p} - \overrightarrow{PF}$
folgt $\overrightarrow{FR}^2 = (\vec{r} - \vec{p} - \overrightarrow{PF}) \cdot \overrightarrow{FR}$.

Wegen $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{FR} = 0$ erhält man
$\overrightarrow{FR}^2 = (\vec{r} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{FR}$.

Dividiert man durch $|\overrightarrow{FR}|$, so folgt

$$|\overrightarrow{FR}| = (\vec{r} - \vec{p}) \cdot \frac{\overrightarrow{FR}}{|\overrightarrow{FR}|}.$$



143.1

Der Vektor $\frac{\overrightarrow{FR}}{|\overrightarrow{FR}|}$ ist ein Normaleneinheitsvektor, der nach derjenigen Seite von E weist, auf der R liegt. Er kann somit dem durch eine vorhandene Ebenengleichung $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ gegebenen Normalenvektor $\vec{n}$ auch entgegengesetzt gerichtet sein.

Satz: Für den Abstand d des Punktes R (mit dem Ortsvektor $\vec{r}$) von der Ebene
E: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ gilt: $d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$.

Hessesche Normalenform

Definition: Eine Ebenengleichung der Form

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

heißt **Hessesche[1] Normalenform**.