NORMALVERTEILUNG

Eine Zufallsgröße X heißt <u>normalverteilt</u> mit den Parametern μ und δ, wenn für alle x∈R gilt:

Dichtefunktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

Verteilungsfunktion: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)$

Anmerkung:
Die Funktionen φ und Φ sind die Dichte- bzw. Verteilungsfunktion der **Standardnormalverteilung.** Sie sind tabelliert oder GTR normalpdf bzw. normalcdf(untere Grenze, obere Grenze, μ,σ)
Die Normalverteilung lässt sich auf zwei Arten geometrisch darstellen:
(1) y= $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (2) als Fläche unter der Glockenkurve y = $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$

Berechnungen:

(1) P(X$\leq x_1) = \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$ Anmerkung: $P(X < x_1) = P(X \leq x_1)$

(2)) P(X$> x_1) = 1 - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$ $P(X \geq x_1) = P(X > x_1)$

(3) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

Anmerkung: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2)$

aus $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$ folgt P(X=x) = $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0$

(4) $P(|X-\mu| \leq c) = P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = \Phi\left(\frac{\mu+c-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-c-\mu}{\sigma}\right) =$

$\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1$

Anmerkung: $P(|X-\mu| < c) = P(|X-\mu| \leq c)$

(5) $P(|X-\mu \geq c|) = 1 - P(|X-\mu| < c) = 1 - \left[2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1\right] = 2 - 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)\right)$

Anmerkung: $P(|X-\mu| > c) = P(|X-\mu| \geq c)$