Wichtige Definitionen

1. Linearkombination
2. Lineare Abhängigkeit / lineare Unabhängigkeit von Vektoren

1.Linearkombination:

Die Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_{1;}\ \vec{a}_{2;}\ \vec{a}_{3;}\ \ldots\ldots\ \vec{a}_k$ heißt die Summe

$r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + r_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots\ldots + r_k \cdot \vec{a}_k = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \vec{a}_i \qquad r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_n \in \mathbf{R}$

gegeben: $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$ $\qquad \vec{a}_1$ nicht parallel $\vec{a}_2$

Frage: Kann man jeden Vektor $\vec{x}$ in der Ebene durch die Gleichung : $\vec{x} = r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2$ darstellen? Begründe!

2. Lineare Unabhängigkeit / lineare Unabhängigkeit

Vektoren $\vec{a}_{1;}\ \vec{a}_{2;}\ \vec{a}_{3;}\ \ldots\ldots\ \vec{a}_k$ heißen linear unabhängig $\Leftrightarrow$ (g.d.w.)

aus $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + r_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots\ldots + r_k \cdot \vec{a}_k = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$

stets $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots r_k = 0$ folgt.

gibt es jedoch reelle Zahlen r_1, r_2, r_3,…r_k, die nicht alle gleich NULL sind, so stets $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + r_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots\ldots + r_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$**, so nennt man die Vektoren linear abhängig.**

In der Ebene sind 2 Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear unabhängig,

wenn $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$ $\qquad \vec{a}_1$ nicht parallel $\vec{a}_2$

Merke: Wenn $\vec{a}_1 = r \cdot \vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}_1 - r \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$ d.h. $\vec{a}_1$ parallel zu $\vec{a}_2$
nennt man $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ **kollineare Vektoren**

Merke: Im Raum legen **zwei nicht kollineare** Vektoren (mit einem Punkt) eine **Ebene** fest.
(planum: lat. Ebene)
Vektoren, die **in einer Ebene** liegen, heißen **komplanar**

→ **Zwei nicht kollineare Vektoren** sind immer **komplanar**
→ **Drei Vektoren** im allgemeinen **nicht**
Drei nicht komplanare Vektoren bilden ein **„Dreibein“ → Spat**

d.h. mit Hilfe eines Dreibeins lässt sich jeder Vektor des Raumes eindeutig als Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ darstellen.

Satz:
2 Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind genau dann **linear abhängig**, wenn sie **kollinear** sind.
3 Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ sind genau dann **linear abhängig**, wenn sie komplanar sind.
4 Vektoren **im Raum** sind **immer linear abhängig**

Satz:

nach: Vektoren $\vec{a}_{1;}\ \vec{a}_{2;}\ \vec{a}_{3;} \ldots\ldots \vec{a}_k$ sind linear unabhängig

wenn $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + r_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots\ldots + r_k \cdot \vec{a}_k = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$ genau die Lösung

$r_1 = r_2 = r_3 = \ldots r_k = 0$ besitzt

Zusammenhang herstellen:
inhomogenes LGS hat genau eine Lösung
→ das dazugehörige homogene LGS hat genau eine Lösung →
die triviale Lösung (0 / 0 / 0 / …..0)
→ det (A) $\neq 0$

Aufgabe:

(1) Sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

(2) Sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

(3) Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ -11 \end{pmatrix}$ linear abhängig, d.h. liegen sie in einer Ebene