ÜA: Geraden, Ebenen, Schatten

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0/ 2 / 3); B(1/ -2 / 6) sowie C(-4 / 2 / 15) gegeben sowie für jedes a ∈ R eine Gerade g_a

mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}; s \in R$.

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E durch A, B und C.

Ermittle die Lagebeziehung von Gerade und Ebene E.

b) Die Gerade mit a = $\frac{1}{8}$ liegt in der Ebene E: 6x +3y+2z = 12.

Bestimme eine Ebene F, die mit der Ebene E die Schnittgerade $g_{\frac{1}{8}}$ hat und durch den Koordinatenursprung läuft.

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0/2/-3)$, $B(-2/6/4)$ sowie für jedes a $(a \in R)$ ein Punkt $P_a(2a;/-a/a)$ und eine Ebene E_a: (11a + 26)x + (16a + 6)y+(– 6a + 4)z = 50a gegeben.

a) Weise nach, dass für jedes a durch die Punkte A, B und P_a eindeutig eine Ebene E_a festgelegt wird.

b) Zeige, dass die gegebene Gleichung die Ebene durch die Punkte A, B und P_a beschreibt.

3. In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Ebenenschar E_t durch E_t: $(t^2 - 1)x + 4y + 4t^2z = 4(t^2-1)$ $t \in R$ gegeben.
Weise nach, dass sich alle Ebenen E_t in einer Geraden schneiden.
Gib eine Gleichung an.

4. Gegeben ist ein gerades Prisma ABCDEFGH mit rechteckiger Grundfläche. Ein Grundflächeneckpunkt besitzt in einem kart. Koordinatensystem die Koordinate A(3/-2/0). Die Diagonalen der Grundfläche schneiden einander im Koordinatenursprung. Ein Eckpunkt der Deckfläche befindet sich im Punkt G(-3/2/10). Von einer Lichtquelle L(0/0/20) wird allseitig Licht ausgestrahlt. Ermittle den Flächeninhalt der Schattenfläche, die durch die Lichtquelle vom Prisma in der x – y – Ebene erzeugt wird.

5. Max spielt hinter dem Haus auf einem Hang. Der Hang hat die Gleichung E: 10 x – 2 y +13 z = **10**. (1LE entspricht 1m)

a) Auf dem Hang befindet sich senkrecht zur x – y – Ebene ein 7,50 m hoher Baum mit dem Fußlotpunkt F(-3,6/16/6). Lichtstrahlen erzeugen mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix}$ von diesem Baum einen Schatten. Untersuche, ob dieser Schatten vollständig auf dem Hang liegt?

b) Der 1,50 m große Max möchte senkrecht vollständig in diesem Schatten stehen. Ermittle die Menge aller Punkte, in denen er sich aufstellen kann, wenn man sowohl Max als auch den Baum als Strecken betrachten kann.

Lösungen: A,B,C → GTR E: 6x+3y+2z = 12 g in E …..s(-1 +8a) = 0 → für a = $\frac{1}{8}$ w. A.

→g ∈E für a $\neq \frac{1}{8}$ → Schnitt; F: z. B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

2 a) wenn Ebene, dann $\overrightarrow{AB} \neq s\overrightarrow{AP_a}$ Widerspruch entsteht!

2 b) Punktprobe A,B und P_a in E_a einsetzen → w.A.

3. z.B. so: t = 0 E_0: -x + 4y = -4

t = 1 E_1 : 4y + 4z = 0 → entweder händisch

oder mit GTR Lagebeziehung Ebene – Ebene → z. B. g_S: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

unbedingt erforderlich g_s in E_t einsetzen → es muss eine w.A. entstehen.

4. am besten gegebene Punkte in ein x – y – Koordinatensystem zeichnen

A(3 / -2 / 0) → E(3 / -2 / 10) B(3 / 2 / 0) → F(3 / 2 / 10) C(-3 / 2 / 0) → G(-3 / 2 / 10)

D(-3 / -2 / 0) → H(-3 / -2 / 10) → A_S = (96 – 24)FE

5. Schnitt g mit E → D(1,9 / 11 / 1) → z > 0 auf Hang!

$\frac{\text{Baum}}{\text{Max}} = \frac{7{,}50}{1{,}50} = \frac{5}{1}$ → $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{5}\overrightarrow{DF}$ → M(0,8 / 12 / 2) → g_{MF}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4{,}2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Schatten für $0 \leq t \leq 1$