Binomialverteilung → Näherungsformel M – L → Normalverteilung

BISHER: $X \to B(n,p)$ verteilt d.h. die Verteilung hat zwei Ergebnisse → Treffer/Niete

$\mu = n \cdot p$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ (q = 1 –p) X: Anzahl der Treffer

(1) $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ (GTR: binompdf(n,p,k))
(genau k Treffer)

(2) $P(X \le k) = P(X = 0) + P(X = 1) + ...P(X = k) = F(n,p,k)$ (GTR: binomcdf(n,p,k)
(höchstens k Treffer)

(3) $P(k_1 \le X \le k_2) = F(n,p,k_2) - F(n,p,(k_1 - 1))$
(mindestens k_1 aber höchstens k_2 Treffer)

(4) $P(X \ge k) = 1 - P(X \le (k-1) = 1 - F(n,p,(k-1)$
mindestens k Treffer

Bisher: Zufallsgröße nimmt diskrete Werte an: z.B. 0, 1, 2 ……. → **diskrete Zufallsgröße**

→ NORMALVERTEILUNG

NEU: Zufallsgröße X nimmt Werte: $k \in R$ **an:**
→ **stetige Zufallsgrößen (diese sind in der Natur sehr oft normalverteilt d.h. lassen sich mit den Gesetzen der Gauß schen Glockenkurve beschreiben)**

Beispiele für stetige Zufallsgrößen:
- Körpergröße von Menschen
- Geburtsgewicht bei Kindern
- Intelligenzquotient des Menschen
- Gewicht einer Kirsche
- Länge einer genormten Schraube

aus Messreihen kann man μ und σ ersehen → Normalverteilung N (μ,σ)

Beispiel: Körpergröße eines erwachsenen Grizzlys ist normalverteilt
mit $\mu = 240cm$ und $\sigma = 10cm$
(Skizze Gaußkurve)

Merke

Für jede normalverteilte stetige Zufallsgröße mit μ,σ gili für k∈**R**

$$P(X \le k) = \Phi(z) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

GTR: $P(X \le k) = \text{normalcdf}(0,k,\mu,\sigma)$

Die Normalverteilung lässt sich auf zwei Arten geometrisch darstellen:

(1) y= $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (2) als Fläche unter der Glockenkurve y = $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$

Berechnungen:

(1) $P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ **Anmerkung:** $P(X < k) = P(X \leq k)$

(2) $P(X > k) = 1 - \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ $P(X \geq k) = P(X > k)$

(3) $P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-\mu}{\sigma}\right)$ GTR normalcdf(k_1,k_2, μ,σ)

Anmerkung: $\underline{P(k_1 \leq X \leq k_2)} = P(k_1 \leq X < k_2) = P(k_1 < X \leq k_2) = \underline{P(k_1 < X < k_2)}$

aus $P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-\mu}{\sigma}\right)$ folgt P(X=k) = $\Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0$

(4) $P(|X-\mu| \leq c) = P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = \Phi\left(\frac{\mu + c - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - c - \mu}{\sigma}\right)$

$= \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1$

Anmerkung: $P(|X-\mu| < c) = P(|X-\mu| \leq c)$

(5) $P(|X - \mu \geq c|) = 1 - P(|X-\mu| < c) = 1 - \left[2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1\right] = 2 - 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)\right)$

damit kann man die **Sigmaregeln,** die auch für Binomialverteilungen gelten
(→ Formelsammlung → können mitunter sehr hilfreich sein) nachweisen:

P($\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(|X-\mu| \leq \sigma) \approx 0{,}680$ **(1σ – Regel)**
P($\mu - 2\cdot\sigma \leq X \leq \mu + 2\cdot\sigma) = P(|X-\mu| \leq 2\cdot\sigma) \approx 0{,}955$ **(2σ – Regel)**
P($\mu - 3\cdot\sigma \leq X \leq \mu + 3\cdot\sigma) = P(|X-\mu| \leq 3\cdot\sigma) \approx 0{,}997$ **(3σ – Regel)**

Interessant sind Intervallwahrscheinlichkeiten: p_1 = 0,9; p_2= 0,95; p_3 = 0,99
Es gilt dann:

P($\mu - 1{,}64\cdot\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\cdot\sigma) = P(|X-\mu| \leq 1{,}64\cdot\sigma) \approx 0{,}90$ **(90% Regel)**

P($\mu - 1{,}96\cdot\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\cdot\sigma) = P(|X-\mu| \leq 1{,}96\cdot\sigma) \approx 0{,}95$ **(95% Regel)**

P($\mu - 2{,}58\cdot\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\cdot\sigma) = P(|X-\mu| \leq 2{,}58\cdot\sigma) \approx 0{,}99$ **(99% Regel)**