

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Vorbemerkung: Bei einem Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum S interessiert man sich für das Eintreten des Ereignisses A , d.h. für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$. Erhält man die Information, dass B eingetreten ist, fallen alle die Ergebnisse des Experimentes weg, die nicht zu B gehören. Für das Ereignis A sind jetzt nur noch die Ergebnisse günstig, die in $A \cap B$ liegen. Da das Ereignis B eingetreten ist, muss man diese Ergebnisse auf B beziehen.

→ **neue Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ für das Ereignis A d.h. diejenige Wahrscheinlichkeit, die sich unter der Vorbedingung, dass B eingetreten ist, ergibt.**

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(Veranschauliche das Problem mit Vierfelder-Tafel bzw. Mengendiagramm → $P_B(A)$ ist der „Anteil, den A aus B ausschneidet, bezogen auf B)

Definition:

$P_B(A)$ heißt die durch das Ereignis B bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A oder $P_B(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist.

Unter der Voraussetzung, dass $P(B) \neq 0$ ist, gilt:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Anmerkung: andere Schreibweise für $P_B(A) \rightarrow P(A/B)$ und wird als „Wahrscheinlichkeit P von A nach B “, gelesen.

Nachweis, dass die Kolmogorow -Axiome auch hier gelten, d.h. $P_B(A)$ eine WK-Verteilung auf den Ergebnisraum S erklärt:

Erinnerung: (1) $P(A) \geq 0$ (2) $P(S) = 1$
(3) $A_1 \cap A_2 = \{ \}$ → $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Diese Axiome werden auf die bedingte Wahrscheinlichkeit übertragen:

$$(1) P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0, \text{ da } P(A \cap B) \geq 0 \text{ und } P(B) > 0$$

$$(2) P_B(S) = \frac{P(B \cap S)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

(3) Mit $A_1 \cap A_2 = \{ \}$ folgt

$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2),$$

da aus $A_1 \cap A_2 = \{ \}$ auch $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \{ \}$ folgt.