AB

Ableitungen / Anwendungen

14 Bilden Sie die 1. und 2. Ableitung.

a) $f(x) = x^2 + e^x$ b) $f(x) = e^{-2x} + \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{e^{3x}}{2x}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ e) $f(x) = e^{x^2-1}$

15 Geben Sie den Definitionsbereich von $f(x)$ an und bilden Sie die 1. und 2. Ableitung.

a) $f(x) = 2x \cdot \ln x$ b) $f(x) = x \cdot \ln\sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ d) $f(x) = \ln\frac{1}{x^2-1}$

16 Bestimmen Sie a und b so, dass sich die Graphen der Funktionen f_1 und f_2

a) mit $f_1(x) = a \cdot e^x$ und $f_2(x) = e^{bx}$ auf der y-Achse senkrecht schneiden

b) mit $f_1(x) = e^{ax} + b$ und $f_2(x) = 1 - e^{-x}$ im Ursprung senkrecht schneiden.

17 Ein Skigelände hat ein Profil, das durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}54 \cdot e^{-x^2}$ für $0 \leqq x \leqq 2{,}5$, x und $f(x)$ in Metern, im Maßstab 1 : 400 beschrieben werden kann.

a) Skizzieren Sie das Profil des Geländes im Maßstab 1 : 5. Wie groß ist das durchschnittliche Gefälle der Piste vom Gipfel bis zum Ende?

b) Untersuchen Sie, bis zu welchem Punkt das Gelände laufend steiler wird.

c) Kann eine Schneeraupe, die maximal 30° Steigung überwinden kann, das Gelände pflegen?

18 Gegeben ist f mit $f(x) = \frac{2\sin(x) - 1}{x}$ mit $D_f = (0; 2\pi]$. Verwenden Sie Ihren CAS.

a) Geben Sie die Schnittpunkte A und B des Graphen von f mit der x-Achse an.

b) Bestimmen Sie den Winkel, unter dem der Graph die x-Achse in A bzw. B schneidet.

c) Bestimmen Sie die Punkte C und D des Graphen von f mit waagerechter Tangente.

d) Gibt es einen Punkt auf dem Graphen von f, in dem die Steigung 1 ist?

GTR

e) Bestimmen Sie die Schnittpunkte E und F der Graphen von f und f′. Haben diese eine besondere Bedeutung?

f) Bestimmen Sie anhand des Graphen die Wertemenge von f und f′. Geben Sie auch deren Bedeutung in eigenen Worten an.

g) Ermitteln Sie den Punkt, in dem die Steigung des Graphen von f den kleinsten Wert hat.

Lösungen: 14 a) $f'(x) = 2x + e^x$ $f''(x) = 2 + e^x$

b) $f'(x) = -2e^{-2x} - \frac{1}{x^2}$ $f''(x) = 4e^{-2x} + \frac{2}{x^3}$

c) $\frac{e^{3x}(3x-1)}{2x^2} = f'(x)$ $f''(x) = \frac{e^{3x}(9x^2-6x+2)}{2x^3}$

d) $f'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}+2}(x+4)}{2x^3}$ $f''(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}+2}(x^2+8x+24)}{4x^4}$

e) $f'(x) = 2x \cdot e^{+x^2-1}$ $f''(x) = 2(1+2x^2)e^{x^2-1}$

---

15. a $x \in \mathbb{R}; x > 0$ $f'(x) = 2 \cdot \ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$ $f''(x) = \frac{2}{x}$

b $x \in \mathbb{R}$ $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x + 1)$ $f''(x) = \frac{1}{2x}$

c) $x \in \mathbb{R}; x > 0$ $f'(x) = \frac{1 - 3\ln x}{x^4}$ $f''(x) = \frac{12 \cdot \ln x - 7}{x^5}$

d) $x \in \mathbb{R}; |x| > 1$ $f'(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ $f''(x) = \frac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$

---

16. a) Schnittpunkt mit y-Achse $(x=0)$ $f_1(0) = f_2(0) \rightarrow a = 1$

$f_1'(0) = a$ $f_2'(0) = b \rightarrow$ senkrechter Schnitt $f_1(0) \cdot f_2(0) = -1$

$1 \cdot b = -1 \rightarrow b = -1$ ↳ $f_1(x) = e^x$ $f_2(x) = e^{-x}$

b) $f_1(0) = 0 \rightarrow 1 + b = 0 \rightarrow b = -1$ $f_1'(0) = a$ $f_2'(0) = 1$

$\rightarrow \perp$ $f_1'(0) \cdot f_2(0) = -1 \rightarrow 1 \cdot a = -1$ $a = -1$ ↳ $f_1(x) = e^{-x} - 1$

$f_2(x) = 1 - e^{-x}$

---

a) $f(x) = 0{,}54 \cdot e^{-x^2} \rightarrow 0 \leq x \leq 2{,}5$ $f(0) = 0{,}54$ $f(2{,}5) \approx 0$

$\rightarrow$ durchschnittliches Gefälle: $m = \tan\varphi = \frac{-0{,}54}{2{,}5} = -0{,}216$

d.h. 12,2° ↳ 21,6 %

b) extremster Anstieg: $x_0 = 0{,}71$ $m = -0{,}463$ ↳ 25° Neigungswinkel

c) ja da 25° < 30°